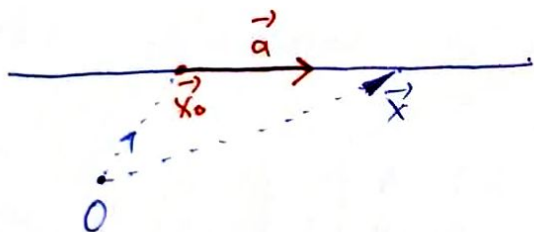


§ Ευθεία στον $\mathbb{R}^3$

Ας υποθέσουμε ότι $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}^3$ με διάνομα δέχως ως προς την αρχή O το $\vec{x}_0$. Εάν $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ είναι μη μηδενικό διάνομα.

Η ευθεία (E) που διέρχεται από το P_0 και είναι παράλληλη προς το $\vec{a}$ έχει εξίσωση $\boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + t \vec{a}} \quad t \in \mathbb{R} \quad (E_1)$



Η εξίσωση (E_1) λέγεται διανυσματική εξίσωση.

Εάν (x, y, z) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{x}$, τότε από την (E_1) έχουμε $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3)$.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 + t a_2 \\ z = z_0 + t a_3 \end{matrix}} \quad t \in \mathbb{R} \quad (E_2)$$

Οι εξισώσεις (E_2) λέγονται παράμετρικές εξισώσεις.

Από τις εξισώσεις (E_2) με αλγεβρική των t , λαμβάνουμε

$$t = \frac{x - x_0}{a_1}$$

$$t = \frac{y - y_0}{a_2}$$

$$t = \frac{z - z_0}{a_3}$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}} \quad (E_3)$$

Οι (E_3) λέγονται αναλυτικές εξισώσεις.

Παρατήρηση

Οι εξισώσεις (Ε3) γράφονται ισοδύναμα στην μορφή

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ευθεία γράφεται ως τομή δύο επιπέδων.

Συμπέρασμα.

① Μια ευθεία (Ε) στον $\mathbb{R}^3$ γράφεται ως τομή δύο επιπέδων.

Ισχύει και το αντίστροφο.

② Αν θεωρήσουμε δύο επίπεδα

$$(\Pi_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0.$$

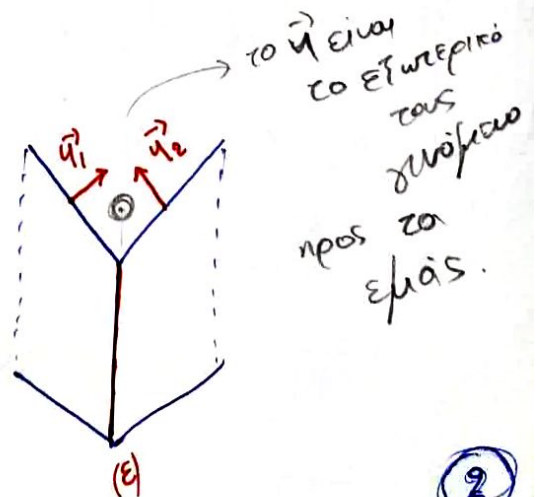
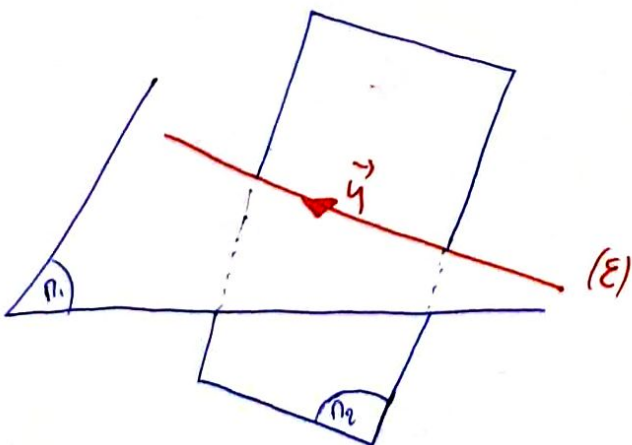
$$(\Pi_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0.$$

τα οποία τέμνονται και δεν αγγίζουν.

Τότε, η τομή τους είναι ευθεία παράλληλη προς το διάνυσμα

$$\vec{d} = \vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$$
$$= (A_1, B_1, \Gamma_1) \times (A_2, B_2, \Gamma_2)$$

όπου $\vec{\eta}_1$ το κάθετο στο (Π_1)
και $\vec{\eta}_2$ το κάθετο στο (Π_2) .



Απόδειξη

Επειδή τα επίπεδα δεν είναι παράλληλα $\rightarrow$ τα επίπεδα διακρίνονται
απών

$$\vec{u}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1)$$

δεν είναι παράλληλα.

$$\vec{u}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2)$$

Από αυτόν ότι το $\vec{a} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$

$$= (\Gamma_1 \Gamma_2 - \Gamma_1 \Gamma_2, A_2 \Gamma_1 - A_1 \Gamma_2, A_1 B_2 - A_2 B_1) \neq (0, 0, 0).$$

Ισοδύναμα τουλάχιστον μία από τις εξισώσεις

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \text{ είναι διαφορετικές του } 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Τότε το σύστημα $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0. \end{cases}$

έχει λύση ως προς x και y . (*) (...)

Διότι, έχουμε λύση $\boxed{\begin{matrix} x = \lambda_1 z + \mu_1 \\ y = \lambda_2 z + \mu_2 \end{matrix}}$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$

Το σύνολο των παραπάνω λύσεων

(*) (...)

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = -\Gamma_1 z - \Delta_1 \\ A_2 x + B_2 y = -\Gamma_2 z - \Delta_2 \end{cases}$$

υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ ώστε

$$\begin{cases} x = \lambda_1 z + \mu_1 \\ y = \lambda_2 z + \mu_2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x &= 1_1 t + \mu_1 \\ y &= 1_2 t + \mu_2 \\ z &= t \end{aligned} \quad , t \in \mathbb{R} \quad \text{που είναι ευθεία.}$$

Παράδειγμα 1: Δίνεται η ευθεία (E):
$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Θα βρούμε τις διάφορες εξισώσεις της (E).

Θα πρέπει να βρούμε ένα σημείο της (E) και ένα παραλλήλο διάνυσμα προς την (E).

Για $z=0$ έχουμε

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 2 \\ 3x - y &= -4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{Άρα } P_0(-2, -2, 0) \text{ είναι λύση.}$$

Θα πρέπει να βρούμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στην (E)



1ος τρόπος

$$\vec{a} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (2, -3, 1) \times (3, -1, 2) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-5, 7, 1)$$

2ος τρόπος

Βρίσκουμε δεύτερο σημείο P_1 στην (E), για παράδειγμα θέτουμε $z=1$ και λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$$

Το διάνυσμα $\vec{a} = \vec{P_0 P_1}$.

Άρα η διανομοστική εξίσωση:

$$\vec{X} = (-2, -2, 0) + t(-5, -1, 7)$$

Οι παραμετρικές είναι

$$\begin{aligned} x &= -2 - 5t \\ y &= -2 - t \\ z &= 7t. \end{aligned}$$

και

$$\frac{x+2}{-5} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-0}{7}$$

$$\begin{cases} -x + 5y + 8 = 0 \\ 7x + 5z + 14 = 0. \end{cases}$$

γιατί δεν μοιάζουν οι εξισώσεις
αυτές με τις αρχικές
που μας δίνει η υπόθεση.

Θα δούμε αν παρακάτω πρόταση των σχετικών δέσμων ανήκει και
επιπέδου.

Πρόταση: Έστω ότι (ε) μια ευθεία με διανομοστική εξίσωση

$$\epsilon) \quad \vec{X} = \vec{x}_0 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$

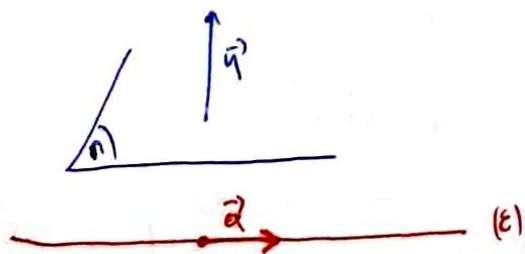
και επιπέδου (η) με εξίσωση

$$\eta) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

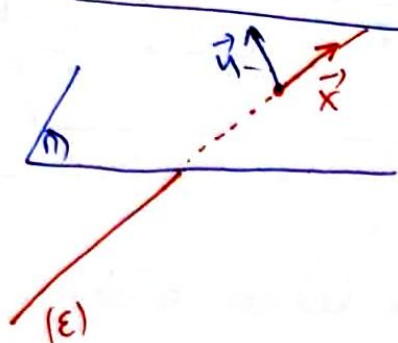
και κάθετο το $\vec{n} = (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

(i) Έστω $\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0$, η (ε) είναι παράλληλη προς το (η).

Έστω το $\vec{x}_0 \in (\eta)$ η (ε) αυτή ανήκει στο (η).



(ii) Εάν $\langle \vec{a}', \vec{u}' \rangle \neq 0$, τότε η ευθεία (ε) και το επίπεδο (η) τέμνονται σε αμείο με διάνομα θέσεως

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \frac{\langle \vec{u}', \vec{x}_0 \rangle + \Delta}{\langle \vec{u}', \vec{a}' \rangle} \vec{a}'$$


Απόδειξη Το (i) είναι φανερό.

(ii) Ας γράψουμε την ευθεία (ε) στην παραμετρική μορφή

$$x = x_0 + t a_1$$

$$y = y_0 + t a_2$$

$$z = z_0 + t a_3$$

και να βρούμε την τομή
με το $Ax + By + Cz + D = 0$.

Συντάσσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 + t a_2 \\ z = z_0 + t a_3 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις 3 πρώτες στην τελευταία

$$\Rightarrow A(x_0 + t a_1) + B(y_0 + t a_2) + C(z_0 + t a_3) + D = 0$$

$$\Rightarrow (A a_1 + B a_2 + C a_3) t = -D - A x_0 - B y_0 - C z_0$$

$$\Rightarrow \langle (A, B, C), (a_1, a_2, a_3) \rangle t = -D - \langle \vec{u}', \vec{x}_0 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{u}', \vec{a}' \rangle t = -D - \langle \vec{u}', \vec{x}_0 \rangle \Rightarrow t = -\frac{D + \langle \vec{u}', \vec{x}_0 \rangle}{\langle \vec{u}', \vec{a}' \rangle}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{\Delta + \langle \vec{u}, \vec{x}_0 \rangle a_1}{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle}$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 - \frac{\Delta + \langle \vec{u}, \vec{x}_0 \rangle a_2}{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle}$$

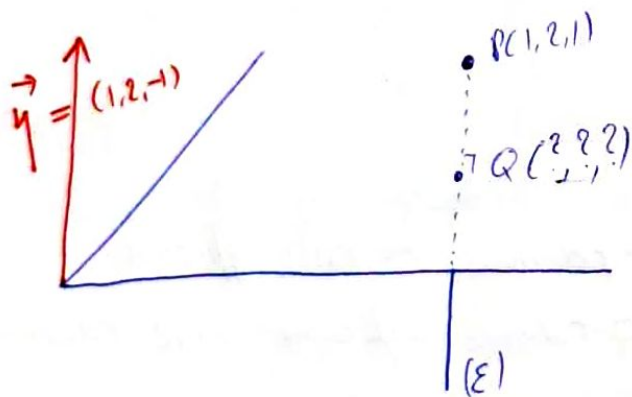
$$z_1 = z_0 - \frac{\Delta + \langle \vec{u}, \vec{x}_0 \rangle a_3}{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - \frac{\Delta + \langle \vec{u}, \vec{x}_0 \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle} \vec{a}}$$

Παράδειγμα : Να βρεθεί το σημείο τομής των επιπέδων

(Π) : $x + 2y - z = 0$ και της κάθετης προς αυτό ευθείας

(ε) που διέρχεται από το σημείο $P(1, 2, 1)$.



Θα βρούμε την (ε). Στην συνέχεια θα βρούμε την τομή της (ε) με το (Π).

Επειδή ολικάμε η (ε) να τέμνει κάθετα το (Π) το εφαπτόμενο της (ε) είναι το $\vec{u} = (1, 2, -1)$. Άρα

$$\vec{x} = (1, 2, 1) + t(1, 2, -1), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x &= 1 + t \\ y &= 2 + 2t \\ z &= 1 - t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

Για να βρούμε το σημείο τής Q , δίνουμε το άσπρη

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 1-t \\ x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$1+t+2(2+2t)-(1-t)=0$$

$$1+t+4+4t-1+t=0$$

$$6t = -4$$

$$t = -\frac{4}{6}$$

$$x = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$y = 2 - \frac{8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

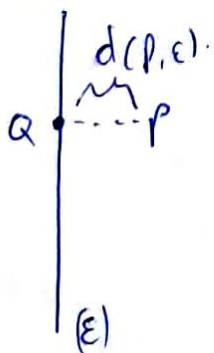
$$z = 1 + \frac{4}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|\vec{QP}\| = \frac{\sqrt{5}}{3} = d(P, \Pi).$$

Παρατήρηση Με την μέθοδο του ασκήσιου παραδείγματος βρίσκουμε και την απόσταση σημείου από επίπεδο.

Ορισμός: Έστω ότι (E) μια ευθεία και P σημείο εκτός αυτής.



Φέρουμε την ορθογώνια προβολή P στην (E) και ως την συμβολίζουμε με Q .

Ορίσουμε απόσταση του P από την (ε) τον αριθμό

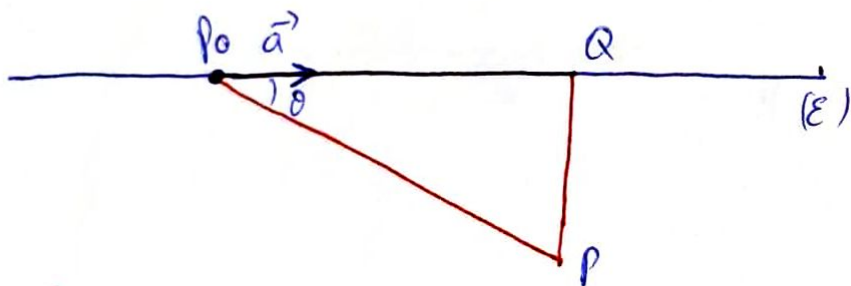
$$d(P, \varepsilon) = \|\vec{PQ}\|.$$

Δείνυμα

Εάν $\vec{a}'$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα προς την (ε) και P σημείο του $\mathbb{R}^3$, τότε

$$d(P, \varepsilon) = \frac{\|\vec{a}' \times \vec{P_0P}\|}{\|\vec{a}'\|},$$

όπου P_0 τυχαίο σημείο της ευθείας.



Απόδειξη

Εάν Q η προβολή του σημείου P στην ευθεία (ε) και $\hat{\angle} P_0PQ = \theta$

Τότε $d(P, \varepsilon) = \|\vec{PQ}\| = \|\vec{P_0P}\| \sin \theta = \frac{\|\vec{a}'\| \|\vec{P_0P}\| \sin \theta}{\|\vec{a}'\|}$

$$d(P, \varepsilon) = \frac{\|\vec{a}' \times \vec{P_0P}\|}{\|\vec{a}'\|}$$